Université Hassan II Mohammedia-Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia
Département de Mathématiques
Filière d'Ingénieur Génie Mathématique et Informatique (GMI)
Concours d'accès à la première année
09 juillet 2014

Epreuve de Mathématiques 1

Tawjihpress.com

Durée : 2 heures

N.B. Calculatrices et documents sont interdits. On tiendra compte de la présentation de la copie

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où f est la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n \geq e$.
2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $x \geq e$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Enoncer la formule des accroissements finis.
5. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.
6. Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Tawjihpress.com

Exercice 2

On considère l'équation différentielle:

$$y'' + 2y' + 5y = 2xe^{-x}\cos 2x \qquad (1)$$

1. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre.

2. Soit l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 5y = 2\,x\,e^{(-1+2i)x} \qquad (2)$$

où i est le nombre complexe.
Chercher une solution particulière de (2) de la forme $y = x(\alpha x + \beta)e^{(-1+2i)x}$.

3. En déduire une solution particulière de (1) comme partie réelle de la solution particulière de (2).

4. En déduire la solution générale de (1).

Tawjihpress.com

Exercice 3

Pour tout a réel strictement positif, on pose:

$$I_a = \iint_{D_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad \text{et} \qquad J_a = \iint_{\Delta_a} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

avec $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq a^2\right\}$ et $\Delta_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\right\}$.

1. Calculer I_a.

2. Représenter dans une même figure les domaines D_a, Δ_a et $D_{\sqrt{2}a}$.

3. Montrer que pour tout $a > 0$, $\quad I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$.

4. En déduire : $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a e^{-x^2}\,dx$.

Tawjihpress.com

Exercice 4

On se propose de comparer la sécurité d'un passager, suivant qu'il voyage dans un avion bimoteur ou dans un quadrimoteur. Nous admettons les hypothèses suivantes:

- Les divers moteurs que l'on peut avoir à utiliser sont de qualité comparable, la probabilité de panne de chacun d'eux étant q avec $(0 \leq q \leq 1)$.
- Chaque moteur a un régime de sécurité indépendant de l'autre moteur ou des trois autres moteurs.
- Un avion réussit son vol si et seulement si la moitié au moins de ces moteurs fonctionne régulièrement.

On note : M_i : "le ième moteur ne tombe pas en panne", $i = 1, 2$ ou $i = 1, 2, 3, 4$,
B : "le bimoteur réussit son vol",
Q : "le quadrimoteur réussit son vol".

1. Déterminer la probabilité qu'un bimoteur réussisse son vol. $1-q(1-q)$

2. Déterminer la probabilité qu'un quadrimoteur réussisse son vol.

3. Dans quel avion, le passager a-t-il le plus de sécurité ?

Université Hassan II Mohammedia-Casablanca

Faculté des Sciences et Techniques

Département de Mathématiques

Filière d'Ingénieurs Génie Mathématique et Informatique (GMI)

Concours d'accès à la première année

09 Juillet 2014

Tawjihpress.com

Mathématiques 2 : Epreuve d'Algèbre

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées. L'emploi d'une calculatrice est interdit.

L'exercice et le problème doivent être rédigés sur des feuilles séparées.

Durée : 2 heures.

Exercice

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par

Tawjihpress.com

$$f(x, y, z) = (\underbrace{x + 2z}_{x}, \underbrace{-y}_{y}, \underbrace{2x + z}_{z})$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Donner la matrice A de f par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer le polynôme caractéristique associé à l'endomorphisme f et trouver les valeurs propres de la matrice A.
5. Déterminer une base pour chacun des espaces propres de A.
6. Donner une base C de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle l'endomorphisme f est représenté par une matrice diagonale D, que l'on explicitera.
7. Déterminer le polynôme minimal de l'endomorphisme f.

$= (1+\lambda)^2(\lambda-3)$

PROBLEME

A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = Id_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective? surjective?
5. Déterminer une base de $Ker\,\varphi$. Quelle est la dimension de $Ker\,\varphi$?
6. L'application φ est-elle injective? surjective?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
13. En déduire que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)dt$.

Tawjihpress.com